Ecole Polytechnique, Eco-557 Macroéconomie Avancée
PC 6
Le modèle des cycles réels
Correction

Exercice 1 : Le modèle de Cagan sous anticipations rationelles

1. A partir de l'expression

$$p_t = aE_t p_{t+1} + (1-a)m_t$$

on trouve la solution générale en itérant vers le futur :[1]

$$\begin{aligned}
& p_t = aE_t p_{t+1} + (1-a)m_t \\
\Leftrightarrow\ & p_t = (1-a)m_t + aE_t\{(1-a)m_{t+1} + aE_{t+1}p_{t+2}\} \\
\Leftrightarrow\ & p_t = (1-a)m_t + a(1-a)E_t m_{t+1} + a^2 E_t\{(1-a)m_{t+2} + aE_{t+2}p_{t+3}\} \\
\Leftrightarrow\ & ... \\
\Leftrightarrow\ & p_t = (1-a)\sum_{s=0}^{\infty} a^s E_t m_{t+s} + \lim_{t\to\infty} a^T E_t p_{t+T}
\end{aligned}$$

La solution fondamentale est celle qui exclut la présence de bulles spéculatives, pour laquelle la condition suivante est respectée :

$$\lim_{t\to\infty} a^T E_t p_{t+T}$$

La solution fondamentale est donc :

$$p_t = (1-a)\sum_{s=0}^{\infty} a^s E_t m_{t+s}$$

Le niveau des prix à la date t s'écrit alors comme une moyenne pondérée des anticipations sur le niveau futur de l'offre de monnaie, les poids étant décroissants au fur et à mesure qu'on s'éloigne dans le futur.
On peut remarquer que ce modèle se caractérise par une neutralité des chocs monétaires à long terme. En effet :

$$(1-a)\sum_{s=0}^{\infty} a^s = 1$$

Si l'offre de monnaie est constante $m_t = \bar{m}$, $\forall t$, le niveau des prix à la date t s'écrit : $p_t = \bar{m}$. L'intégralité des chocs monétaires se répercute immédiatement sur le niveau des prix.
2. La solution générale s'écrit :

$$p_t = p_t^f + b_t$$

[1] On utilise ici la loi des anticipations itérées qui implique : $E[E[x|I_{t+1}]|I_t] = E[x|I_t]$ (les anticipations aujourd'hui de ce que seront les anticipations futures sont égales aux anticipations réalisées à la période présente sachant que l'ensemble d'informations est le même dans les deux cas).

avec p_t^f le prix fondamental défini ci-dessus et b_t une bulle. En utilisant la dynamique des prix du modèle on trouve :

$$\begin{aligned} & p_t = (1-a)m_t + aE_t\{p_{t+1}\} \\ \Leftrightarrow \quad & p_t^f + b_t = (1-a)m_t + aE_t\{p_{t+1}^f\} + aE_t\{b_{t+1}\} \\ \Leftrightarrow \quad & b_t = aE_t\{b_{t+1}\} \end{aligned}$$

Toutes les trajectoires de b qui satisfont la condition $b_t = aE_t\{b_{t+1}\}$ sont solution du modèle. Dès lors que $a < 1$, b_t explose en espérance :

$$\lim_{i \leftarrow \infty} E_t b_{t+i} = \frac{b_t}{a^i} = \begin{cases} +\infty & if\ b_t > 0 \\ -\infty & if\ b_t < 0 \end{cases}$$

On peut citer des exemples qui satisfont cette condition. Il existe d'abord la solution déterministe : $b_t = \frac{b_0}{a^t}$ avec b_0 une condition initiale arbitraire, dans laquelle b_t évolue selon une tendance déterministe. Si b_0 est positif, le niveau des prix p_t augmentera de manière exponentielle, même si l'offre de monnaie est constante. Ensuite, il existe des solutions stochastiques de la forme : $b_t = \frac{M_t}{a^t}$ avec M_t une martingale, ie. processus stochastique tel que $E_t M_{t+1} = M_t$.
On peut noter que la condition $b_t = aE_t\{b_{t+1}\}$ implique que b_t (et donc p_t) croit en valeur anticipée au taux $\frac{1}{a}$, taux qui est explosif. Il suffit d'anticiper une telle croissance des prix pour provoquer une fuite devant la monnaie qui valide cette anticipation. Cette hypothèse permet d'expliquer des situations d'hyperinflation.
En général, comme la solution fondamentale est unique en son genre, elle est sélectionnée par le théoricien sous l'argument que les agents se coordonnent sur cette solution en raison de sa singularité (argument de Sargent-Wallace). En revanche, dans un modèle avec des fondements micro, il existe des conditions de transversalité qui permettent d'éliminer les solutions explosives (les bulles).

Exercice 2 : Cycles réels

1. Les entreprises résolvent un programme statique de la forme :

$$\max_{K_t, L_t} \pi_t = Y_t - W_t L_t - Z_t K_t$$

sous la contrainte technologique :

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

Les conditions sont naturellement l'égalisation des productivités marginales aux prix des facteurs. Elles s'écrivent :

$$\frac{(1-\alpha)Y_t}{L_t} = W_t$$
$$\frac{\alpha Y_t}{K_t} = Z_t$$

Le choc de productivité provoque une augmentation de la demande des facteurs : déplacement de la courbe de demande.

2. Le Langrangien du programme s'écrit :

$$\mathcal{L} = E\left(U + \sum_t \beta^t \lambda_t (W_t L_t + Z_t K_t - C_t - K_{t+1})\right)$$

et les conditions d'optimalité par rapport à C_t, L_t et K_t sont :

$$1/C_t = \lambda_t \tag{1}$$
$$\Gamma'(L_t) = \lambda_t W_t \tag{2}$$
$$\lambda_t = \beta E_t(\lambda_{t+1} Z_{t+1}) \tag{3}$$

La combinaison des deux premières conditions d'optimalité donne l'arbitrage consommation-loisir :

$$\frac{1}{C_t} = \frac{\Gamma'(L_t)}{W_t}$$

La troisième condition correspond à la condition d'Euler qui se réecrit :

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \left(\frac{Z_{t+1}}{C_{t+1}}\right)$$

Elle résume l'arbitrage intertemporel entre consommation présente et consommation future. Le membre de gauche correspond à l'utilité marginale de la consommation d'une unité à la date t. Le membre de droite correspond à l'utilité marginale escomptée dans le cas où le ménage renonce à consommer une unité en t, l'investit et consomme le rendement en $t+1$. A l'équilibre, l'agent est indifférent entre consommer en t ou en $t+1$.

3. A l'équilibre, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{C_t} = \beta E_t \left\{\frac{Z_{t+1}}{C_{t+1}}\right\} \\
&K_{t+1} = I_t \\
&C_t + I_t = Y_t = \frac{Z_t K_t}{\alpha}
\end{aligned}$$

En combinant ces trois équations, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{C_t} = \alpha\beta E_t \left\{\frac{C_{t+1} + I_{t+1}}{I_t C_{t+1}}\right\} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{I_t}{C_t} = \alpha\beta + \alpha\beta E_t \left\{\frac{I_{t+1}}{C_{t+1}}\right\}
\end{aligned}$$

4. En itérant par l'avant l'expression précédente, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\frac{I_t}{C_t} = \alpha\beta + \alpha\beta E_t \left\{\frac{I_{t+1}}{C_{t+1}}\right\} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{I_t}{C_t} = \alpha\beta + \alpha\beta E_t \left\{\alpha\beta + \alpha\beta E_{t+1}\left(\frac{I_{t+2}}{C_{t+2}}\right)\right\} \\
\Leftrightarrow\ &\ldots \\
\Leftrightarrow\ &\frac{I_t}{C_t} = \sum_{s=1}^{\infty} (\alpha\beta)^s + \lim_{T\to\infty} (\alpha\beta)^T E_t \left\{\frac{I_{t+T}}{C_{t+T}}\right\}
\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse d'absence de bulle spéculative, on trouve finalement :

$$\frac{I_t}{C_t} = \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}$$

En utilisant la condition d'équilibre du marché des biens, on en déduit alors $I_t = \alpha\beta Y_t$ et $C_t = (1-\alpha\beta)Y_t$. On peut combiner ce résultat avec la condition d'optimalité relative à l'arbitrage consommation-loisir et la demande de facteurs :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{C_t} = \frac{\Gamma'(L_t)}{W_t} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{(1-\alpha\beta)Y_t} = \frac{\Gamma'(L_t)}{(1-\alpha)Y_t/L_t} \\
\Leftrightarrow \quad & L_t\Gamma'(L_t) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}
\end{aligned}$$

L'emploi est constant dans ce modèle simplifié. Finalement en logarithme (en éliminant les constantes) on a $y_t = a_t + \alpha k_t + (1-\alpha)l \approx a_t + \alpha k_t$ et $k_{t+1} = \log(\alpha\beta) + a_t + \alpha k_t + (1-\alpha)l \approx \alpha k_t + a_t$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
y_t &= a_t + \alpha k_t \\
&= a_t + \alpha a_{t-1} + \alpha^2 k_{t-1} \\
&= ... \\
&= a_t + \alpha a_{t-1} + \alpha^2 a_{t-2} + ... + \alpha^t a_{t-t} + \alpha^{t+1} k_0 \\
&= a_t + \alpha L a_t + (\alpha L)^2 a_t + ... \\
&= \frac{a_t}{1-\alpha L}
\end{aligned}$$

avec L l'opérateur retard.
On trouve que la réponse de la production décroit continuement après un choc de productivité ce qui est en opposition avec la réponse en cloche de Coogley-Nason qui traduit un ajustment graduel. Ce résultat est partagé par un modèle plus complet et a donné lieu à de nombreux travaux introduisant des délais d'ajustement dans l'emploi (modèle d'appariement Andolfatto (1996) AER) ou des effets d'amplification (accélérateur financier Bernanke, Gertler et Gilchrist (1999)).

Exercice 3 : Dépenses publiques et cycles réels (Christiano et Eichenbaum, 1992)
1. La contrainte de ressources agrégées s'écrit :

$$c_t^P + g_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \leq y_t \tag{4}$$

Le Lagrangien de ce problème s'écrit donc :

$$\mathcal{L}_0 = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\ln(c_t^P + \theta g_t) + \gamma V(1-n_t) - \lambda_t \left(c_t^P + g_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t - y_t \right) \right] \right\}$$

D'où les conditions du premier ordre :

$$
\begin{aligned}
0 &= E_0\{\frac{1}{c_t^P + \theta g_t} - \lambda_t\} && (5)\\
0 &= E_0\{-\gamma V'(1-n_t) + \lambda_t(1-\alpha)k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha}\} && (6)\\
0 &= E_0\{-\lambda_t + \beta[\lambda_{t+1}((1-\delta+\alpha\frac{y_{t+1}}{k_{t+1}})]\} && (7)
\end{aligned}
$$

La combinaison des deux premières conditions du premier ordre donne l'arbitrage consommation-loisir :

$$\frac{1}{c_t^P + \theta g_t} = \frac{\gamma V'(1-n_t)}{W_t}$$

On vérifie donc que les chocs de dépenses publiques affectent l'arbitrage consommation-loisir et modifient donc l'offre de travail. La réponse de n_t à g_t sera sensible à la forme de la fonction V, et aux différents paramètres, notamment γ, θ et ρ.

2. Dans le cas particulier $\theta = 1$, c_t^P et g_t n'entrent dans le programme du plannificateur social que sous la forme additive $(c_t^P + g_t)$. Dans ce cas, les chocs exogènes sur g_t se transmettent proportionnellement à c_t^P (qui diminue quand g_t augmente) sans effet sur les autres variables réelles (y_t, n_t et k_{t+1}). On a donc $d_n = 0$.
Dans le cas opposé où $\theta = 0$, les dépenses publiques n'ont aucun effet sur l'utilité des individus et sont strictement équivalentes à une perte de ressources dans l'économie. Le plannificateur réagit à la baisse des revenus agrégés en diminuant la consommation privée et en augmentant l'offre de travail ($\uparrow n_t$ et $\downarrow c_t^P$). On a alors $d_n > 0$.
Remarque : Sous l'hypothèse de continuité, on en déduit que la réponse de n_t à un choc de dépenses publiques est une fonction décroissante de θ.

3. Par rapport au modèle dans lequel les dépenses publiques n'ont pas d'effet sur l'activité, l'introduction des dépenses publiques ($\theta = 0$) améliore la capacité du modèle à reproduire la volatilité relative de la consommation privée et des dépenses publiques. Elle augmente également la volatilité de l'emploi (particulièrement dans le cas avec travail indivisible) mais insuffisamment pour reproduire la volatilité observée. Quel que soit le modèle, les simulations conduisent à une corrélation entre heures travaillées et productivité moyenne, qui n'est pas conforme aux observations empiriques.