PC6 : Le modèle des cycles réels

Isabelle Méjean
isabelle.mejean@polytechnique.edu
http://mejean.isabelle.googlepages.com/

Ecole Polytechnique, Eco-553 Macroéconomie avancée

7 novembre 2008

Exercice 1:
Le modèle de Cagan sous anticipations rationnelles

Anticipations rationnelles

- Lucas, prix Nobel en 1995
- Idée: les agents sont capables de tirer parti de toute l'information disponible pour former leur anticipations, de sorte qu'en moyenne stochastique, ils ne se trompent pas. Autrement dit, ils évaluent les grandeurs économiques futures à leur espérance conditionnelle à l'espace des informations connus.
- Remarque: Ceci ne signifie pas que les agents sont omniscients, simplement qu'ils ont la même connaissance de l'économie que le modélisateur. Ceci ne signifie pas non plus qu'ils sont de parfaits prédicateurs : le tirage des grandeurs à chaque période n'est pas systématiquement égal à l'espérance de sa loi de probabilité.
- Alternative: Anticipations constantes, anticipations adaptatives, etc...

Le modèle de Cagan

- Utilisé pour modéliser les périodes d'hyperinflation
- Idée: Même en anticipations rationnelles, il peut se former des bulles spéculatives
- Equilibre du marché monétaire fonction uniquement des anticipations d'inflation:

$$m_t - p_t = -\alpha \pi^a = -\alpha (E_t p_{t+1} - p_t)$$

  avec m_t l'offre de monnaie exogène, p le niveau général des prix.
- Prix d'équilibre:

$$p_t = (1-a) \sum_{i=0}^{\infty} a^i E_t m_{t+i} + \lim_{T \to \infty} a^T E_t p_{t+T}$$

  moyenne pondérée des anticipations sur la masse monétaire plus condition terminale
- Remarque: utilise la loi des anticipations itérées: $E[E[x|I_{t+1}]|I_t] = E[x|I_t]$

Solution fondamentale et bulle

- Solution fondamentale: exclut la présence de bulles spéculatives ($\lim_{t\to\infty} a^T E_t p_{t+T}$):

$$p_t^f = (1-a)\sum_{s=0}^{\infty} a^s E_t m_{t+s}$$

- Solution générale:

$$p_t = p_t^f + b_t$$

avec b_t une bulle.

$$\begin{aligned} & p_t = (1-a)m_t + aE_t\{p_{t+1}\} \\ \Leftrightarrow \quad & p_t^f + b_t = (1-a)m_t + aE_t\{p_{t+1}^f\} + aE_t\{b_{t+1}\} \\ \Leftrightarrow \quad & b_t = aE_t\{b_{t+1}\} \end{aligned}$$

Solution fondamentale et bulle (2)

- Toutes les trajectoires de b qui satisfont la condition $b_t = aE_t\{b_{t+1}\}$ sont solution du modèle. Dès lors que $a < 1$, b_t explose en espérance:

$$\lim_{i\to\infty} E_t b_{t+i} = \frac{b_t}{a^i} = \begin{cases} +\infty & \text{if } b_t > 0 \\ -\infty & \text{if } b_t < 0 \end{cases}$$

- Exemples:
  - Solution déterministe: $b_t = b_0/a^t \rightarrow b_t$ évolue selon une tendance déterministe
  - Solution stochastique de la forme $b_t = M_t/a^t$ avec M_t une Martingale ($E_t M_{t+1} = M_t$)
- En général, comme la solution fondamentale est unique en son genre, elle est sélectionnée par le théoricien sous l'argument que les agents se coordonnent sur cette solution en raison de sa singularité (argument de Sargent-Wallace). En revanche, dans un modèle avec des fondements micro, il existe des conditions de transversalité qui permettent d'éliminer les solutions explosives (les bulles).

Exercice 2: Cycles réels

Hypothèses

- Economie simplifiée à 2 biens (travail et bien matériel)
- Concurrence parfaite, marchés complets
- Technologie à rendements constants:

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

  avec A_t productivité (stochastique)
- Dépréciation totale du capital:

$$K_{t+1} = I_t$$

  Préférences intertemporelles:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\log C_t - \Gamma(L_t))$$

Comportement des entreprises

- Maximisation du profit sous contrainte technologique (programme statique lorsque ce sont les individus qui accumulent le capital):

$$\begin{cases} \max_{K_t, L_t} \pi_t = Y_t - W_t L_t - Z_t K_t \\ s.t. Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \end{cases}$$

- Conditions du premier ordre:

$$\frac{(1-\alpha) Y_t}{L_t} = W_t$$
$$\frac{\alpha Y_t}{K_t} = Z_t$$

- Le choc de productivité provoque une augmentation de la demande des facteurs: déplacement de la courbe de demande.

Comportement du ménage

- Maximisation de l'utilité sous la contrainte budgétaire:

$$\begin{cases} \max_{\{C_t\}_{t=0}^{\infty},\{L_t\}_{t=0}^{\infty},\{I_t\}_{t=0}^{\infty}} U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\log C_t - \Gamma(L_t)) \\ s.t. \quad C_t + I_t \geq W_t L_t + Z_t K_t \\ \qquad\quad I_t = K_{t+1} \end{cases}$$

- Lagrangien:

$$\mathcal{L} = E\left(U + \sum_t \beta^t \lambda_t (W_t L_t + Z_t K_t - C_t - K_{t+1})\right)$$

- Conditions d'optimalité:

$$\begin{aligned} 1/C_t &= \lambda_t \\ \Gamma'(L_t) &= \lambda_t W_t \\ \lambda_t &= \beta E_t(\lambda_{t+1} Z_{t+1}) \end{aligned}$$

Comportement du ménage (2)

- Arbitrage consommation-loisir:

$$\frac{1}{C_t} = \frac{\Gamma'(L_t)}{W_t}$$

- Condition d'Euler:

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \left(\frac{Z_{t+1}}{C_{t+1}} \right)$$

Equilibre

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \left\{ \frac{Z_{t+1}}{C_{t+1}} \right\}$$
$$K_{t+1} = I_t$$
$$C_t + I_t = Y_t = \frac{Z_t K_t}{\alpha}$$

En combinant ces trois équations, on trouve:

$$\frac{I_t}{C_t} = \alpha\beta + \alpha\beta E_t \left\{ \frac{I_{t+1}}{C_{t+1}} \right\}$$

En itérant vers l'avant:

$$\frac{I_t}{C_t} = \sum_{s=1}^{\infty} (\alpha\beta)^s + \lim_{T\to\infty} (\alpha\beta)^T E_t \left\{ \frac{I_{t+T}}{C_{t+T}} \right\}$$

ie sans bulle:

$$\frac{I_t}{C_t} = \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}, \quad I_t = \alpha\beta Y_t, \quad C_t = (1-\alpha\beta) Y_t$$

Equilibre (2)

$$\frac{1}{C_t} = \frac{\Gamma'(L_t)}{W_t}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(1-\alpha\beta)Y_t} = \frac{\Gamma'(L_t)}{(1-\alpha)Y_t/L_t}$$
$$\Leftrightarrow \quad L_t\Gamma'(L_t) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}$$

- L'emploi est constant dans ce modèle simplifié.
- En logarithme et en éliminant les constantes:

$$y_t = a_t + \alpha k_t + (1$$

$$k_{t+1} = \log(\alpha\beta) + a_t + \alpha k_t + (1-\alpha)l \approx \alpha k_t + a_t$$

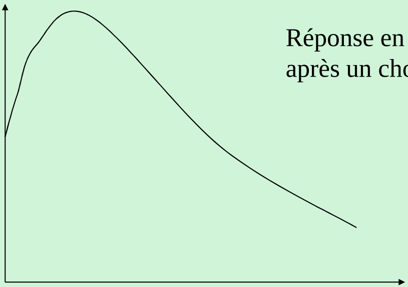
$$\Rightarrow \quad y_t = \frac{a_t}{1-\alpha L}$$

avec L l'opérateur retard.

$\Rightarrow$ La réponse de la production décroît continuement après un choc de productivité

Réponse de la production à un choc de productivité

Cogley, T. and J. Nason "Output Dynamics in Real Business Cycle Models," *American Economic Review*, 85: 492-511, 1995.



Réponse en cloche de la production après un choc transitoire

Solutions proposées

- Délais d'ajustement dans l'emploi (modèle d'appariement Andolfatto (1996) AER)
- Effets d'amplification (accélérateur financier Bernanke, Gertler et Gilchrist (1999)).

Exercice 3:
Dépenses publiques et cycles réels
(Christiano et Eichenbaum, 1992)

Motivation

- Réduire la corrélation entre heures travaillées et productivité du travail dans le modèle RBC standard.
- Solution: Introduction d'un choc agrégé de demande (dépenses publiques) $\rightarrow$ Introduction d'une deuxième source de fluctuations qui affecte les heures travaillées
- Eficacité démontrée dans une calibration à deux chocs

Hypothèses

- Point-de-départ: Modèle RBC standard
- Analyse des choix d'un planificateur social
- Consommation agrégée = consommation privée + consommation publique:

$$c_t = c_t^P + \theta g_t$$

- Dépenses publiques stochastiques:

$$\ln g_t = (1-\rho)\ln \bar{g} + \rho \ln g_{t-1} + \mu_t$$

avec μ_t une innovation de moyenne $\ln \bar{g}$ et d'écart-type σ_μ.

- Pas de choc de productivité (dans l'analyse mais deux chocs dans la calibration)

Programme du planificateur

$$\begin{cases} \max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty},\{n_t\}_{t=0}^{\infty},\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{\ln c_t + \gamma V(1-n_t)\right\} \\ s.t.: \\ c_t + g_t + i_t \leq y_t \\ c_t = c_t^P + \theta g_t \\ k_{t+1} = (1-\delta k_t + i_t \\ y_t = n_t^{1-\alpha} k_t^{\alpha} \\ \ln g_t = (1-\rho)\ln \bar{g} + \rho \ln g_{t-1} + \mu_t \end{cases}$$

Lagrangien:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\ln(c_t^P + \theta g_t) + \gamma V(1-n_t) - \lambda_t \left(c_t^P + g_t + k_{t+1} \right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left. -(1-\delta)k_t - y_t \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Conditions du premier ordre

$$
\begin{aligned}
0 &= E_0\{\frac{1}{c_t^P + \theta g_t} - \lambda_t\} \\
0 &= E_0\{-\gamma V'(1-n_t) + \lambda_t(1-\alpha)k_t^\alpha n_t^{-\alpha}\} \\
0 &= E_0\{-\lambda_t + \beta[\lambda_{t+1}((1-\delta+\alpha\frac{y_{t+1}}{k_{t+1}})]\}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Arbitrage consommation-loisir:

$$\frac{1}{c_t^P + \theta g_t} = \frac{\gamma V'(1-n_t)}{W_t}$$

Les chocs de dépenses publiques affectent l'arbitrage consommation-loisir et modifient donc l'offre de travail.
La réponse de n_t à g_t sera sensible à la forme de la fonction V, et aux différents paramètres, notamment γ, θ et ρ.

Impact des dépenses publiques sur l'emploi

- $\theta = 1$: c_t^P et g_t n'entrent dans le programme du plannificateur social que sous la forme additive $(c_t^P + g_t) \rightarrow$ les chocs exogènes sur g_t se transmettent proportionnellement à c_t^P (qui diminue quand g_t augmente) sans effet sur les autres variables réelles (y_t, n_t et k_{t+1}). On a donc $d_n = 0$.
- $\theta = 0$: les dépenses publiques n'ont aucun effet sur l'utilité des individus et sont strictement équivalentes à une perte de ressources dans l'économie. Le plannificateur réagit à la baisse des revenus agrégés en diminuant la consommation privée et en augmentant l'offre de travail ($\uparrow n_t$ et $\downarrow c_t^P$). On a alors $d_n > 0$.
- Dans le cas général, la réponse de n_t à un choc sur g_t est une fonction décroissante de θ

Confrontation du modèle aux données

Table: Moments simulés

	Modèle				Moments observés
	$\theta = 1$		$\theta = 0$		
	Divisible Labor	Indivisible Labor	Divisible Labor	Indivisible Labor	
σ_{c^P}/σ_y	.57	.53	.49	.46	.44
σ_{dk}/σ_y	2.33	2.45	2.11	2.24	2.24
σ_n/σ_y	.36	.50	.46	.62	.86
$\sigma_n/\sigma_{y/n}$	.54	.96	.79	1.36	1.21
σ_g/σ_y	1.76	1.55	1.66	1.44	1.15
σ_y	.02	.023	.021	.025	.019
$corr(y/n, n)$	.95	.92	.81	.73	-.20

Source : Christiano et Eichenbaum (1992)

Confrontation du modèle aux données (2)

- Par rapport au modèle dans lequel les dépenses publiques n'ont pas d'effet sur l'activité, l'introduction des dépenses publiques ($\theta = 0$) améliore la capacité du modèle à reproduire la volatilité relative de la consommation privée et des dépenses publiques.
- Elle augmente également la volatilité de l'emploi (particulièrement dans le cas avec travail indivisible) mais insuffisamment pour reproduire la volatilité observée.
- Quel que soit le modèle, les simulations conduisent à une corrélation entre heures travaillées et productivité moyenne, qui n'est pas conforme aux observations empiriques.