

Ecole Polytechnique, Eco-557 Macroéconomie Avancée
PC 4
Le modèle d'appariement

Exercice 1: La dynamique du chômage et des emplois vacants

1. Avec un taux d'intérêt exogène r , le taux d'actualisation sur une période dt s'écrit $1/(1 + rdt)$. A chaque période, la "valeur présente" du poste occupé s'égalise à sa valeur sur le marché du travail, égale au profit instantané auquel s'ajoute le gain moyen lié à un changement d'état et l'évolution de la "cote" de cet actif:

$$r\Pi_e = y - w + q(\Pi_v - \Pi_e) + \dot{\Pi}_e \quad (1)$$

$$r\Pi_v = -h + m(\theta)(\Pi_e - \Pi_v) + \dot{\Pi}_v \quad (2)$$

Sous l'hypothèse de libre-entrée, on retrouve l'égalité habituelle entre le profit espéré d'un emploi occupé et son coût moyen:

$$\Pi_e = \frac{h}{m(\theta)}$$

2. De même pour les travailleurs :

$$rV_e = w + q(V_u - V_e) + \dot{V}_e \quad (3)$$

$$rV_u = z + \theta m(\theta)(V_e - V_u) + \dot{V}_u \quad (4)$$

3. Le surplus d'un appariement est défini par :

$$S = V_e - V_u + \Pi_e - \Pi_u$$

La dynamique du surplus dépend donc de la dynamique de ses composantes:

$$\dot{S} = \dot{V}_e - \dot{V}_u + \dot{\Pi}_e - \dot{\Pi}_v$$

ce qui se réécrit, en utilisant (1), (3) et la condition de libre-entrée:

$$(r + q)S = \dot{S} + y + \dot{V}_u - rV_u \quad (5)$$

On obtient donc une équation différentielle décrivant l'évolution temporelle du surplus. Dans la mesure où le salaire négocié n'apparaît pas, on en déduit que le surplus est indépendant de la trajectoire suivie par les salaires, et, comme dans le modèle de base, l'issue des négociations salariales s'apparentera à une règle de partage du surplus conditionnée par les pouvoirs respectifs des participants. On aura donc encore :

$$V_e - V_u = \gamma S \quad \text{et} \quad \Pi_e - \Pi_v = (1 - \gamma)S \quad (6)$$

En utilisant la condition de libre-entrée, on a donc:

$$S = \frac{h}{(1 - \gamma)m(\theta)} \implies \dot{S} = -\frac{hm'(\theta)}{(1 - \gamma)m^2(\theta)}\dot{\theta} \quad (7)$$

4. L'équation (7), la relation (4) caractérisant l'utilité espérée d'un chômeur et la première des règles de partage (6) entraînent encore :

$$rV_u - \dot{V}_u = z + \theta m(\theta) \gamma S = z + \frac{\gamma \theta h}{1 - \gamma} \quad (8)$$

En reportant les valeurs de S , \dot{S} et $(rV_u - \dot{V}_u)$ données par les relations (7) et (8) dans l'équation différentielle (5) décrivant l'évolution temporelle du surplus, il vient après quelques réarrangements de termes :

$$\frac{hm'(\theta)}{(1 - \gamma)m^2(\theta)} \dot{\theta} + \frac{h[r + q + \gamma \theta m(\theta)]}{(1 - \gamma)m(\theta)} - y + z = 0 \quad (9)$$

Cette équation différentielle caractérise complètement la trajectoire de l'indicateur de tension. A l'état stationnaire ($\dot{\theta} = 0$), cette équation est bien entendu identique à la relation obtenue en cours donnant la valeur stationnaire θ^* de la tension régnant sur le marché du travail. L'équation (9) est une équation différentielle non linéaire du premier ordre de la forme $\varphi(\dot{\theta}, \theta) = 0$. L'étude de la convergence des trajectoires de θ au voisinage de l'équilibre stationnaire se réalise néanmoins assez facilement en linéarisant la fonction φ autour du point ($\dot{\theta} = 0, \theta = \theta^*$). Après quelques calculs, on aboutit à l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\dot{\theta} + a\theta = a\theta^* \quad \text{avec} \quad a = \gamma \frac{m^2(\theta^*)}{m'(\theta^*)} - (r + q) < 0.$$

La solution générale de cette équation est de la forme $\theta = Be^{-at} + \theta^*$, où B est une constante. Le paramètre a étant négatif, la seule trajectoire convergente de θ correspond à $B = 0$. On a alors, à chaque instant, $\theta = \theta^*$. Ce résultat signifie que la variable θ "saute" immédiatement sur sa valeur stationnaire, il provient du fait que les ouvertures d'emplois vacants sont des décisions qui sont uniquement "tournées vers l'avant" (*forward looking*). Elles ne prennent en compte que les anticipations de profit futur et ne contiennent aucun facteur d'inertie. Le nombre d'emplois vacants peut donc s'adapter immédiatement à toute modification de l'environnement. Plus généralement, toutes les décisions des agents sont tournées vers l'avant, il est alors facile de vérifier que le salaire négocié est aussi une variable qui saute instantanément sur sa valeur stationnaire.

5. La dynamique du chômage s'écrit:

$$\dot{U} = \dot{N} + qL - \theta m(\theta)U$$

. En utilisant la relation comptable $U = Nu \Rightarrow \dot{U} = \dot{u}N + u\dot{N}$, on en déduit la dynamique du taux de chômage:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\dot{U}}{N} - \frac{\dot{N}u}{N} \\ &= \frac{\dot{N}}{N} + q\frac{L}{N} - \theta m(\theta)\frac{U}{N} - un \\ \dot{u} &= n + q - [q + n + \theta m(\theta)]u \end{aligned}$$

On en déduit une équation linéaire du premier ordre définissant la dynamique du taux de chômage:

$$\dot{u} + [q + n + \theta^* m(\theta^*)]u = q + n$$

La forme de cette équation implique une convergence monotone vers la valeur stationnaire :

$$u = \frac{q + n}{q + n + \theta^* m(\theta^*)}$$

Il convient de noter que le taux de chômage n'est donc pas une variable qui regarde uniquement vers l'avant. La durée moyenne de recherche d'un emploi étant une quantité positive, il existe à chaque instant un stock de chômeurs qui représente un facteur d'inertie pour la dynamique de l'économie. Après un choc, le taux de chômage ne rejoindra que progressivement sa nouvelle valeur stationnaire.

On peut représenter la dynamique du chômage et des emplois vacants dans le plan (u, v) . L'équilibre stationnaire est défini à l'intersection de la courbe décroissante de Beveridge qui correspond aux points d'équilibre des flux de main-d'oeuvre entre l'emploi et le chômage:

$$u = \frac{q + n}{q + n + \theta m(\theta)}$$

et de la courbe croissante définissant le niveau d'équilibre de θ en fonction du salaire négocié :

$$\frac{(1 - \gamma)(y - z)}{r + q + \gamma\theta m(\theta)} = \frac{h}{m(\theta)}$$

A partir de n'importe quel point dans le plan (u, v) l'économie saute immédiatement sur le niveau d'équilibre de θ au moyen d'un ajustement du nombre d'état vacant, avant de converger de manière monotone vers le taux de chômage d'équilibre.

6. La hausse du taux d'intérêt s'apparente à ce qu'on appelle un choc agrégé (modification de la demande ou de l'offre globale qui ne déplace pas la courbe de Beveridge). La Figure 4 du poly illustre les effets d'un choc agrégé identifié à une hausse permanente du taux d'intérêt r (une baisse de la production y serait équivalente). Les points E^* et E' représentent respectivement les équilibres stationnaires avant et après le choc agrégé. A partir de E^* , l'indicateur de tension "saute" instantanément de son niveau initial θ^* à son niveau final θ' . Ce mouvement s'accompagne d'un saut du taux d'emplois vacants qui passe de v^* à v_1 , le taux de chômage restant à sa valeur initiale u^* . Puis, à partir du point E_1 , l'économie rejoint progressivement son état final E' en cheminant le long du segment E_1E' .

7. La hausse du taux de destruction d'emplois d'apparente à un choc de réallocation, qui déplace la courbe de Beveridge. La Figure 5 illustre l'impact d'un choc de réallocation assimilé à une hausse permanente du taux q de destruction des emplois. Désormais la courbe de Beveridge se déplace et le nouvel équilibre stationnaire E' se trouve sur la courbe (CB') . Partant du point E^* , la dynamique de l'économie est analogue à celle que nous avons décrite à propos d'un choc agrégé et il n'y a donc pas lieu de la répéter.

Dans les deux cas, on observe une relation non linéaire entre le taux de chômage et le taux d'emplois vacants, qui décrit des boucles dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. On retrouve ce type de relation dans els estimations empiriques de la courbe de Beveridge.

Exercice 2: L'inefficacité de l'équilibre de marché en présence de salaire négocié

1. Dans le cas d'agents neutres au risque, le planificateur maximise simplement la production instantanée. En reprenant les notations utilisées jusqu'ici, la production totale instantanée, notée Ω , se définit de la façon suivante :

$$\Omega = yL + zU - hV$$

Les coûts de recherche hV liés à l'existence d'emplois vacants sont comptés négativement car ils correspondent à une perte en termes de bien numéraire. Il faut aussi considérer, en toute rigueur, que le gain z d'un chômeur n'intègre aucun transfert comme, par exemple, les allocations chômage. Dans cette formulation, z représente un indicateur du rendement du loisir ou de la production domestique. Enfin, le produit global tient évidemment compte de manière positive de la production totale yL de

bien numéraire. En divisant la précédente relation par la taille N de la population active et en se rappelant que, par définition, $v = \theta u$, on obtient l'expression du produit par tête, soit :

$$\omega = y(1 - u) + zu - h\theta u \quad (10)$$

Avec une population active constante ($n = 0$), il est possible de caractériser très simplement les propriétés de l'optimum social lorsque le taux d'intérêt r tend vers zéro. Dans ce cas, le planificateur cherche à rendre maximum le produit par tête étant donné l'équilibre des flux du marché du travail

$$u\theta m(\theta) = q(1 - u).$$

Le programme du planificateur s'écrit donc :

$$\text{Max}_{\{\theta, u\}} \omega = y(1 - u) + zu - h\theta u \quad \text{s.c.} \quad u = \frac{q}{q + \theta m(\theta)},$$

en reportant la valeur de u donnée par l'équation de la courbe de Beveridge dans ω , le programme du planificateur prend la forme :

$$\text{Max}_{\theta} \left[y + \frac{q(z - h\theta - y)}{q + \theta m(\theta)} \right]$$

En annulant la dérivée par rapport à θ de l'expression entre crochets, on obtient une équation définissant implicitement la valeur optimale de l'indicateur de tension, soit :

$$\frac{[1 - \eta(\theta)](y - z)}{q + \theta m(\theta)\eta(\theta)} = \frac{h}{m(\theta)} \quad , \quad \eta(\theta) = -\frac{\theta m'(\theta)}{m(\theta)} \quad (11)$$

Cette équation met en évidence l'élasticité $\eta(\theta)$ de la fonction d'appariement par rapport au taux de chômage — on vérifie aisément que $\eta(\theta) = UM_U(V, U)/M(V, U)$ — alors que cette quantité ne jouait aucun rôle dans l'équilibre décentralisé. Elle acquiert ici une grande importance car c'est la sensibilité de la fonction d'appariement qui délimite le poids respectif des effets de congestion et des externalités positives dans le processus d'appariement. Lorsque $r = 0$, la comparaison de la relation (11) avec l'équation donnant la valeur de la tension à l'équilibre décentralisé du marché du travail obtenue dans le chapitre précédent, qui s'écrit

$$\frac{(1 - \gamma)(y - z)}{q + \theta m(\theta)\gamma} = \frac{h}{m(\theta)}$$

montre que cet équilibre coïncide avec l'optimum social, si et seulement si $\gamma = \eta(\theta)$. Cette condition, connue sous le nom de "*condition d'Hosios*", indique que seule une valeur du pouvoir de négociation de l'employé égale à l'élasticité de la fonction d'appariement par rapport au taux de chômage assure le bon dosage entre les effets de congestion et les externalités positives. En règle générale, il n'y a aucune raison pour que cette égalité soit vérifiée, l'équilibre de marché est donc inefficace lorsque les salaires sont négociés de manière décentralisée.

2. Dans le cas général, le programme du planificateur prend la forme suivante:

$$\text{Max}_{\theta} \int_0^{+\infty} \omega e^{-rt} dt \quad (12)$$

sous la contrainte :

$$\dot{u} = q(1 - u) - \theta m(\theta)u. \quad (13)$$

Notons μ le multiplicateur associé à cette dernière contrainte, le Hamiltonien du programme du planificateur s'écrit :

$$H = [y(1 - u) + zu - h\theta u] e^{-rt} + \mu [q(1 - u) - \theta m(\theta)u].$$

Les conditions du premier ordre sont données par les équations :

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial u} = -\dot{\mu} \quad (14)$$

En dérivant le Hamiltonien par rapport à θ , la première des conditions (14) implique après quelques réarrangements de termes :

$$he^{-rt} = -\mu m(\theta)[1 - \eta(\theta)] \quad (15)$$

Et la condition de transversalité s'écrit :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu \cdot u = 0$$

En dérivant maintenant le Hamiltonien par rapport à u , la seconde des conditions du premier ordre (14) donne :

$$(z - y - h\theta)e^{-rt} - \mu[q + \theta m(\theta)] = -\dot{\mu} \quad (16)$$

En se plaçant désormais à l'équilibre stationnaire ($\dot{\theta} = 0$), la dérivation de la relation (15) par rapport à t implique $\dot{\mu} = -r\mu$. En reportant cette valeur de $\dot{\mu}$ dans (16) et en tenant compte de l'expression de μ extraite de la condition du premier ordre (15), il est possible d'écrire après quelques réarrangements l'équation donnant la valeur optimale de l'indicateur de tension sous la forme suivante :

$$\frac{[1 - \eta(\theta)](y - z)}{r + q + \theta m(\theta)\eta(\theta)} = \frac{h}{m(\theta)} \quad (17)$$

La comparaison de cette relation avec l'équation donnant la valeur de la tension à l'équilibre décentralisé du marché du travail obtenue dans le chapitre précédent, qui s'écrit

$$\frac{(1 - \gamma)(y - z)}{r + q + \theta m(\theta)\gamma} = \frac{h}{m(\theta)}$$

montre que cet équilibre coïncide avec l'optimum social si et seulement si $\gamma = \eta(\theta)$. On retrouve donc la condition d'Hosios lorsque le taux d'intérêt est strictement positif.