Ecole Polytechnique, Eco-431 Macroéconomie
PC 3
Croissance et optimalité
Correction

Exercice 1 : Le choix d'un système de retraite
1. Dans un cadre concurrentiel en rendements constants, le produit est réparti entre travail et capital:

$$Y_t = w_t L_t + r_t K_t$$

avec w_t et r_t les rémunérations réelles du travail et du capital. Celles-ci sont déterminées par la productivité marginale de chaque facteur lorsque la firme maximise son profit :

$$w_t = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = (1-\alpha)k_t^{\alpha}, \quad r_t = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \alpha k_t^{\alpha-1}$$

2. Le régime de retraite est équilibré lorsque l'ensemble des cotisations des jeunes travailleurs est égal aux pensions versées aux vieux qui ne travaillent plus :

$$\begin{aligned} & N_t v_t = N_{t-1} h p_t \\ \Leftrightarrow \quad & N_t \tau w_t = N_{t-1} h \lambda w_{t-1} \\ \Leftrightarrow \quad & (1+n)\tau k_t^{\alpha} = h\lambda k_{t-1}^{\alpha} \\ \Leftrightarrow \quad & (1+n)\tau(1+g_t) = \lambda h \end{aligned}$$

avec $g_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}$ le taux de croissance du revenu par tête.

L'équilibre du système de retraite dépend donc des paramètres de ce système (taux de cotisation et taux de remplacement) mais aussi des évolutions de la population active (démographie et taux d'activité des jeunes) et du taux de croissance qui affecte la croissance des salaires. Plus la croissance est forte, plus la rémunération des jeunes est forte par rapport à celle de la génération précédente, ce qui facilite le financement du système de retraites. Cet effet est lié au fait que le taux de remplacement porte sur le salaire perçu pendant la période d'activité. Si la pension était fonction du salaire d'équilibre courant ($p_t = \lambda w_t$), cet effet disparaîtrait. En outre, l'effet de la croissance ne porte que sur la période de transition. A l'équilibre stationnaire, $g^* = 0$ et l'équilibre s'écrit : $(1+n)\tau = \lambda h$.

3. Application:

a. Le tableau 1 met en évidence une baisse prévue du nombre de cotisants par rapport au nombre de retraités ce qui déséquilibre le financement des retraites. Celle-ci ne peut être compensée à long terme que par une hausse du taux de cotisations ou une baisse du taux de remplacement. Pour certaines professions, on a même $n < 1$ à l'horizon 2040 ce qui signifie que le nombre de cotisants sera plus faible que le nombre de bénéficiaires du système de retraites.

La baisse du ratio $(1+n)/h$ implique, pour maintenir l'équilibre du système de retraite, une hausse de la croissance des salaires (g_t), une augmentation des cotisations (τ) ou une baisse du taux de remplacement (λ).

b. La réforme du régime général du secteur privé implique :

- une baisse du salaire de référence (calculé sur une durée plus longue donc sur un profil de salaire démarrant plus bas) qui équivaut à une baisse du taux de remplacement λ,

- une augmentation de la durée de cotisation permettant de bénéficier du taux plein, *i.e.* une augmentation de la période d'activité (baisse de h) qui réduit le nombre de bénéficiaires du régime.

c. La solution préconisée par le rapport Charpin consiste à allonger la durée de cotisation permettant de bénéficier du taux plein, *i.e.* à réduire h ou au moins à freiner sa croissance, inhérente à l'allongement de la durée de vie. Elle est présentée comme une alternative plus souhaitable que l'augmentation du taux de cotisation (τ) ou la baisse du taux de remplacement (λ). La première alternative pourrait en effet faire peser une pression trop forte sur le revenu des actifs, qui découragerait l'offre de travail et l'épargne. La seconde alternative conduit quant-à-elle à une baisse du niveau de vie des retraités.

4. Le régime est équilibré: $(1+n)\tau w_t = \lambda h w_{t-1}$. Les contraintes budgétaires de l'agent, à chaque période de sa vie s'écrivent :

$$\begin{aligned} c_t^j &= (1-\tau)w_t - s_t \\ c_{t+1}^v &= (1-h)w_{t+1} + (1+r_{t+1}-\delta)s_t + \lambda h w_t \end{aligned}$$

d'où la contrainte budgétaire intertemporelle :

$$c_{t+1}^v + (1+r_{t+1}-\delta)c_t^j = [1-h+(1+n)\tau]w_{t+1} + (1-\tau)(1+r_{t+1}-\delta)w_t$$

Choix d'épargne maximisant l'utilité :

$$\max_{s_t} \{\ln[(1-\tau)w_t - s_t] + \beta \ln[(1-h+(1+n)\tau)w_{t+1} + (1+r_{t+1}-\delta)s_t]\}$$

$$CPO : \frac{-1}{(1-\tau)w_t - s_t} + \frac{\beta(1+r_{t+1}-\delta)}{[1-h+(1+n)\tau]w_{t+1} + (1+r_{t+1}-\delta)s_t} = 0$$

On en déduit l'épargne à l'optimum :

$$s_t = \frac{\beta}{1+\beta}(1-\tau)w_t - \frac{1-h+(1+n)\tau}{(1+\beta)(1+r_{t+1}-\delta)}w_{t+1}$$

qu'on peut comparer avec l'épargne que l'individu choisirait s'il n'y avait ni système de retraite ni possibilité de travailler pendant la vieillesse :

$$s_t = \frac{\beta}{1+\beta}w_t$$

L'épargne des jeunes dépend positivement du revenu disponible lors de leur période d'activité et négativement du revenu qu'ils toucheront dans le futur par le biais du système de retraite ou de leur activité professionnelle. A l'optimum, l'épargne est donc décroissante du taux de cotisation τ et du taux d'activité $(1-h)$. L'effet de τ passe à la fois par la baisse du revenu disponible pendant la période d'activité, qui limite la capacité d'épargne, et par la hausse de la pension de retraite future, qui réduit l'incitation à capitaliser. Enfin, s_t est une fonction décroissante de $(1+n)/(1+r_{t+1}-\delta)$ qu'on peut interpréter comme le rendement relatif du régime de retraite par rapport à celui de l'épargne.
Loi d'évolution du stock de capital par travailleur :

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= s_t N_t \\ \Rightarrow k_{t+1} &= \frac{s_t N_t}{L_{t+1}} = \frac{s_t}{1+n}\frac{N_{t+1}}{L_{t+1}} \end{aligned}$$

Or : $L_t = N_t + (1-h)N_{t-1} = N_t\left[1 + (1-h)/(1+n)\right] \Rightarrow N_t/L_t \approx 1 - (1-h)/(1+n)$ pour h proche de 1. On en déduit :

$$k_{t+1} = \frac{n+h}{(1+n)^2} s_t$$

En intégrant l'épargne optimal :

$$s_t = \frac{\beta}{1+\beta}(1-\tau)(1-\alpha)k_t^\alpha - \frac{1-h+(1+n)\tau}{(1+\beta)(1+r_{t+1}-\delta)}(1-\alpha)k_{t+1}^\alpha$$

on trouve :

$$k_{t+1} = \frac{n+h}{(1+n)^2}\frac{\beta}{1+\beta}(1-\tau)(1-\alpha)k_t^\alpha - \frac{n+h}{(1+n)^2}\frac{1-h+(1+n)\tau}{(1+\beta)(1+\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}-\delta)}(1-\alpha)k_{t+1}^\alpha$$

A l'équilibre stationnaire et avec dépréciation complète du capital ($\delta = 1$):

$$k^* = \left[\frac{(n+h)\beta(1-\alpha)\alpha(1-\tau)}{\alpha(1+n)^2(1+\beta) + (n+h)(1-h+(1+n)\tau)(1-\alpha)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Dans ce cadre, le taux d'épargne est endogène et dépend du revenu disponible en première période et du revenu futur espéré. Le stock de capital à l'équilibre stationnaire est croissant de h, c'est-à-dire que plus les vieux travaillent, plus le stock de capital de long terme est faible puisque la possibilité d'avoir un revenu du travail pendant la deuxième période de vie réduit l'incitation à épargner en première période. Comme dans le modèle de Solow, la croissance démographique réduit le stock de capital par tête à l'équilibre stationnaire. L'effet est ici renforcé cependant par l'impact de la croissance démographique sur le revenu des retraités, donc sur l'incitation à épargner. Enfin, les paramètres du système de retraites influencent le stock de capital de long terme: un taux de cotisation élevé réduit le stock de capital en diminuant la capacité d'épargne des jeunes et en augmentant le revenu que les vieux retirent de leur pension de retraite.

5. Dans le cas sans régime de retraites ($\tau = 0$) et sans travail des vieux ($h = 1$), on a :

$$\begin{aligned}
k_{t+1} &= \frac{s_t}{1+n} \\
s_t &= \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha)k_t^\alpha \\
\Rightarrow k_0^* &= \left(\frac{\beta}{1+\beta}\frac{1-\alpha}{1+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
r_0^* &= \alpha\left(\frac{1+\beta}{\beta}\frac{1+n}{1-\alpha}\right)
\end{aligned}$$

On vérifie que le stock de capital de long terme est supérieur à celui qu'on obtient dans un cadre avec système de retraites par répartition et travail des vieux. En outre, la rémunération du capital à long terme ne correspond pas à l'équilibre optimal (où $r^* = n$).

a) L'introduction d'un système de retraite par répartition ($\tau > 0$) réduit le stock de capital par tête de long terme et augmente donc le taux d'intérêt à l'équilibre stationnaire. Le stock de capital de long terme diminue car i) les jeunes ont un revenu disponible plus faible pour épargner, ii) la mise en place d'un système de retraites qui assure une revenu aux vieux diminue l'incitation à épargner. A noter que, si on part d'une situation de suraccumulation, la mise en place du système de retraites est dynamiquement efficace puisqu'elle rapproche l'économie du stock de capital de règle d'or.

b) La mise au travail des individus au début de leur vieillesse ($h < 1$) réduit également le stock de capital par tête de long terme en réduisant l'épargne des jeunes et en augmentant la part des actifs dans la population.

c) Introduction d'un régime par capitalisation à cotisations définies ($v_t = \tau w_t; p_t = (1 + r_t - \delta)\tau w_{t-1}$):
Les contraintes budgétaires de l'agent deviennent :

$$\begin{aligned} c_t^j &= (1-\tau)w_t - s_t \\ c_{t+1}^v &= (1 + r_{t+1} - \delta)(s_t + \tau w_t) \end{aligned}$$

et l'épargne optimale :

$$s_t = \left[\frac{\beta}{1+\beta} - \tau\right] w_t$$

Dans la mesure où la capitalisation et l'épargne ont le même rendement, les montants capitalisés viennent juste en déduction de l'épargne. L'équation d'accumulation du capital s'écrit alors : $K_{t+1} = N_t(s_t + \tau w_t)$ ou, en terme de capital par tête :

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha)k_t^\alpha$$

A long terme, on a :

$$k^* = \left[\frac{1-\alpha}{1+n}\frac{\beta}{1+\beta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

i.e. la même chose que dans le cas sans système de retraites.