**Ecole Polytechnique, Eco-557 Macroéconomie Avancée**
**PC 3**
**Destruction créatrice**

## Exercice 1: Destruction créatrice et $\beta$-convergence

**1.** La fonction $F$ est croissante de $A_t$ qui mesure l'état des connaissances dans le pays domestique au moment où une nouvelle innovation est faite. Cela signifie que, comme dans le modèle de Aghion-Howitt, il y a des externalités positives liées à l'activité de recherche-développement: la $(t+1)$ème entreprise innovante profite de l'accumulation de connaissances résultant de l'activité de recherche des autres chercheurs.

La fonction $F$ est également croissante de $e^{g\tau}$, ie du niveau de la productivité du reste du monde. Ceci signifie qu'il y a également des externalités internationales liées à l'activité de recherche-développement : les entreprises de l'économie domestique profitent des innovations faites par le reste du monde.

Enfin, l'hypothèse $F(A, A) = \gamma A$ signifie qu'un pays dont l'état de connaissances est égal à la moyenne mondiale ne profite d'aucune externalités internationales. Sa productivité croît alors, comme dans le reste du monde, au taux $g$.

**2.** La croissance conditionnelle implique que les pays les plus en retard ont tendance à croître plus vite que les pays avancés. Ici, on peut mettre en évidence un phènomène de croissance conditionnelle vers le taux de croissance moyen du reste du monde. Pour celà, considérons le cas d'une économie domestique "en retard", telle que $A_t < A^*_\tau$. En utilisant les propriétés de la fonction $F$, on vérifie aisément que $F(A_t, A^*_\tau) > F(A_t, A_t)$. Le bénéfice en termes de productivité d'une nouvelle innovation est alors:

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = \frac{F(A_t, A^*_\tau)}{A_t} > \gamma$$

ie l'économie croît plus vite que la moyenne mondiale.

Au contraire, si l'économie domestique est relativement "en avance", ie si $A_t > A^*_\tau$ alors, $F(A_t, A^*_\tau) < F(A_t, A_t)$ et

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = \frac{F(A_t, A^*_\tau)}{A_t} < \gamma$$

Sous ces hypothèses, il y a donc bien convergence conditionnelle ie un rattrapage des pays les plus en avance par les pays les plus en retard.

## Exercice 2: Un modèle de destruction créatrice avec activité de recherche intra-firme

**0.** Dans le modèle de base de Aghion et Howitt, les innovateurs qui sont entrés sur le marché ne font plus de recherche car la valeur d'une nouvelle innovation $(V_{t+1} - V_t)$ est inférieure à sa valeur subjective pour un chercheur outsider $(V_{t+1})$. Le salaire à verser à un chercheur insider à la firme est donc trop élevé par rapport à sa productivité marginale. Cette propriété tient au fait que la technologie $t$ profite immédiatement à tous les chercheurs outsiders. Cette externalité décourage l'innovation de la part des firmes en place.

**1.** Parallèlement à la production du bien intermédiaire, le monopole a une activité de recherche destinée à développer de nouveaux biens intermédiaires. Son programme consiste à choisir la part de la main-d'ouvre qu'il alloue à la recherche. Pour cela, il compare le profit espéré de cet investissement à son coût:

$$\max_{n_t} \left[\lambda n_t V_{t+1} - w_t n_t\right]$$

On obtient à l'optimum une relation identique à celle obtenue dans le cadre d'un marché du travail concurrentiel:

$$w_t = \lambda V_{t+1}$$

Le monopole investit dans la recherche jusqu'à ce que le produit marginal d'un chercheur ($\lambda V_{t+1}$) soit exactement égal à son coût marginal.

**2.** Pour le monopole, la valeur de la $t$ième innovation s'écrit:

$$rV_t = \pi_t - \pi_{t-1} - \lambda n_t V_t + \lambda n_t V_{t+1} \tag{1}$$

où $\pi_t$ désigne le flux de profit induit par la vente du bien intermédiaire $t$ et $n_t$ le volume de travail utilisé dans le secteur de la recherche lorsque le $t^{ième}$ bien intermédiaire est utilisé comme facteur de production. Cette équation de prix d'actif indique simplement que le flux de valeur associé à une innovation $t$, soit $rV_t$, est égal au flux de profit supplémentaire lié à la vente de ce bien intermédiaire ($\pi_t$ moins la rente $\pi_{t-1}$ qu'il percevait de la vente du bien intermédiaire $t-1$) diminué de l'espérance de perte liée à l'arrivée d'une nouvelle innovation $t+1$, soit $n_t V_t$, et augmenté de l'espérance de gain sur cette prochaine innovation ($n_t V_{t+1}$). La différence par rapport au modèle de base de Aghion et Howitt est liée au fait que le monopole profite seul des ouvertures que les avancées technologiques induisent. Si la découverte d'un nouveau bien intermédiaire annule la rente de monopole dont il disposait, elle lui procure également un nouveau monopole et c'est donc la différence des gains sur chaque bien intermédiaire qui détermine son intérêt à innover. A l'équilibre, la valeur de l'innovation $t$ est donc une fonction croissante de la valeur de l'innovation $t+1$.

**3.** Le monopole qui produit le bien intermédiaire $t$ extrait toute la rente et obtient un flux de profit

$$\pi_t = \max_x [p_t(x)x - w_t x],$$

où $p_t(x)$ est le prix du bien intermédiaire $t$. Comme les entreprises productrices du bien final sont en concurrence parfaite, elles maximisent leur profit, égal à $\frac{A_t}{\alpha}x^\alpha - p_t x$, par rapport à $x$, en prenant le prix des biens intermédaires comme donné. Ceci entraîne l'égalisation du prix de chaque bien intermédiaire à sa productivité marginale, soit un prix (ou encore une "fonction de demande inverse"):

$$p_t(x) = A_t x^{\alpha-1}. \tag{2}$$

La maximisation du profit de monopole, égal à $A_t x^\alpha - w_t x$, donne donc

$$x_t = \left(\frac{\alpha}{\omega_t}\right)^{1/(1-\alpha)}, \omega_t \equiv w_t/A_t \tag{3}$$

$$\pi_t = A_t (1-\alpha) \left(\frac{\omega_t}{\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha-1)} = \frac{1-\alpha}{\alpha} w_t x_t \tag{4}$$

A l'équilibre stationnaire, le nombre de chercheurs ainsi que le salaire ajusté de la productivité sont constants. Le gain escompté attendu de la $(t+1)$ème innovation est alors égal à $\gamma V_t$. En substituant dans (1), on obtient la relation d'arbitrage suivante :

$$\begin{aligned} & [r + \lambda n_{t+1}(1-\gamma)]V_{t+1} = \pi_{t+1} - \pi_t \\ \Leftrightarrow\ & [r + \lambda n_{t+1}(1-\gamma)]\frac{A_t \omega_t}{\lambda} = (1-\alpha)\left[\left(\frac{\omega_{t+1}}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} A_{t+1} - \left(\frac{\omega_t}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} A_t\right] \\ \Leftrightarrow\ & \omega_t = \frac{\lambda(1-\alpha)}{r + \lambda n_{t+1}(1-\gamma)}\left[\left(\frac{\omega_{t+1}}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\gamma - \left(\frac{\omega_t}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right] \qquad (A) \end{aligned}$$

D'où à l'équilibre stationnaire:

$$\omega = \frac{\lambda(1-\alpha)(\gamma-1)}{r+\lambda n(1-\gamma)}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \tag{5}$$

A l'équilibre stationnaire, l'économie se reproduit d'une innovation à l'autre, tous les coûts et gains étant multipliés par $\gamma$.

**4.** Les équations (3), (5) et la condition d'équilibre du marché du travail:

$$L = n + \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (LS)$$

impliquent :

$$1 = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\lambda(\gamma-1)(L-n)}{r+\lambda n(1-\gamma)} \tag{6}$$

On vérifie que l'emploi dans la recherche est une fonction croissante de la "taille" $\gamma$ des innovations, de la population active $L$ et de la productivité $\lambda$ de la recherche alors que c'est une fonction décroissante du taux d'intérêt. La baisse de $r$ augmente le bénéfice marginal de la recherche grâce à une augmentation de la valeur de l'innovation. De même, si $\gamma$ augmente l'accroissement des profits liés à une innovation est plus grand, ce qui incite à investir dans la RD. L'augmentation de $L$ augmente elle aussi le bénéfice marginal de la recherche tout en diminuant son coût (puisque le salaire diminue). Enfin, la hausse de $\lambda$ a un effet ambigu puisqu'elle diminue le bénéfice marginal d'une innovation mais aussi son coût marginal. L'étude analytique de (13) montre cependant que le second effet domine ce qui augmente *in fine* l'emploi dans la recherche. Comme dans le cas vu en cours, on peut représenter l'équilibre dans le plan $(n, \omega)$ et montrer qu'il correspond à l'intersection de la courbe (L) croissante d'équilibre du marché du travail et de la courbe (A) décroissante, reflétant l'arbitrage entre emploi dans la recherche ou dans le secteur manufacturier.

**5.** On peut comparer avec le cas proposé dans le modèle de Aghion et Howitt (situation de "laissez-faire" sans monopole dans la RD), on avait alors:

$$1 = \gamma\lambda\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{L-n}{r+\lambda n}$$

Dans le modèle étudié ici, le monopole internalise lors de sa décision d'investissement dans la RD, l'impact des innovations potentielles sur la productivité future. Cela se traduit par une baisse du taux d'actualisation du monopole $(r - \lambda n(\gamma - 1))$, par rapport à celui des agents privés de l'équilibre décentralisé $(r + \lambda n)$. En effet, le monopole internalise l'externalité intertemporelle liée au fait que l'innovation présente augmente la productivité des innovations futures. En outre, le monopole internalise également l'effet de destruction, en valorisant la hausse du profit lié à la nouvelle innovation (et pas seulement le niveau du profit comme dans l'équilibre décentralisé). Cela se traduit par le terme $\gamma - 1$ au numérateur, qui se substitue au terme $\gamma$. Il en résulte que l'emploi dans la RD est plus élevé lorsque le monopole a aussi un monopole sur les innovations, puisqu'il tient compte du caractère "créateur" du processus de destruction-créatrice (effet négatif sur les rentes présentes compensé par un effet positif sur les rentes futures).

Au contraire, dans le cas d'un plannificateur social, on avait la solution stationnaire suivante :

$$1 = \frac{\lambda(\gamma-1)\left(\frac{1}{\alpha}\right)(L-n^*)}{r-\lambda n^*(\gamma-1)}$$

L'emploi choisi par le monopole est plus faible que celui choisi par le plannificateur social car le monopole s'approprie une partie seulement du surplus social et valorise donc moins l'innovation que le plannificateur. Cet différence est liée à un effet d'appropriabilité.

**6.** Le rendement espéré d'une unité de travail dans la recherche pour un concurrent est de $\lambda V_{t+1}$. Pour un concurrent, l'équation d'arbitrage est donc

$$w_t = \lambda V_{t+1}.$$

Le monopole, lorsqu'il calcule le rendement de l'investissement d'une unité de travail dans la recherche tient compte du fait qu'une innovation détruira le produit qu'il exploite actuellement. La valeur d'une innovation est donc égale à

$$V_{t+1} - V_t = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) V_{t+1} < V_{t+1}.$$

Par conséquent, si la probabilité de succès du monopole est égale à celle des concurrents ($\lambda = \lambda_1$) le monopole n'a aucune incitation à faire de la recherche: le coût d'utilisation d'une unité de travail dans la recherche, égal à $w_t = \lambda V_{t+1}$, est supérieur à son rendement $\lambda \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) V_{t+1}$. Le monopole n'investit dans la recherche que s'il a un avantage suffisamment grand, c'est-à-dire si

$$\lambda_1 > \frac{\gamma}{\gamma - 1} \lambda$$