

Ecole Polytechnique, ECO553 - Macroéconomie Avancée
PC 2 - Le modèle de Ramsey
3 octobre 2008

Objet de la PC: le but de cet exercice est d'étudier le profil optimal de la consommation et de l'accumulation du capital dans un modèle à horizon infini. Nous commençons par traiter du cas, analysé par Frank Ramsey dès 1928, où un planificateur maximise l'utilité de l'agent représentatif. Ses décisions d'épargne et d'investissement sont, par définition, socialement optimales. Dans un second temps, nous montrons l'équivalence du sentier optimal choisi par le planificateur avec celui d'une économie décentralisée de concurrence parfaite.

On se place en économie fermée. La population L_t croît au taux $n \geq 0$. La population active est égale à la population totale. Chaque individu offre inélastiquement une unité de travail par unité de temps. Le temps est continu. Il y a un bien numéraire et du travail. Il n'y a pas de progrès technique ni de dépréciation du capital. La production est soit consommée soit investie. Formellement, en notant Y la production, K le capital et C la consommation :

$$Y_t = F(K_t, L_t) = C_t + \dot{K}_t \quad (1)$$

où F est une fonction de production néoclassique à rendements constants et $\dot{K} = dK_t/dt$. On note $k = K/L$ le ratio capital travail et $f(k) = F(k, 1)$. f est strictement concave, $f(0) = 0$, et vérifie les conditions d'Inada : $f'(0) = +\infty$, $f'(+\infty) = 0$. On note $k_0 > 0$ le stock de capital initial.

1. Ecrire l'équation (1) en termes par tête en notant $x = X/L$ pour tout X .

Les préférences sont représentées par l'intégrale des utilités :

$$U_s = \int_s^{+\infty} u(c_t) e^{-\rho(t-s)} dt \quad (2)$$

Le bien-être du ménage représentatif à la date s , U_s , est la somme actualisée des utilités instantanées $u(c_t)$ qui dépendent de la consommation par tête $c_t = C_t/L_t$. La fonction d'utilité instantanée u est concave et strictement croissante. Le paramètre $\rho > 0$ représente le taux de préférence pour le présent, ou encore le facteur d'escompte.

2. Supposons qu'un planificateur central maximise, à la date $s = 0$, le bien-être du ménage en décidant de sa consommation et de son investissement. Ecrire le programme d'optimisation du planificateur.

3. Montrer que le choix optimal aboutit à la relation suivante entre la consommation et le capital

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} \left[\frac{c_t u''(c_t)}{u'(c_t)} \right] = \rho + n - f'(k_t)$$

et interpréter cette relation.

4. Ecrire et interpréter la condition d'optimalité de la question précédente avec $u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$.

5. Ecrire et interpréter la condition de transversalité.

6. Déterminer les valeurs d'équilibre stationnaire de la consommation et du capital par tête.

7. Représenter graphiquement la dynamique du capital et de la consommation dans le plan (k, c) .

On analyse maintenant l'équilibre de concurrence parfaite de l'économie étudiée jusqu'à présent. Il y a un marché du travail et un marché du capital. On note w_t le taux de salaire et r_t le taux d'intérêt. La production est réalisée par une entreprise représentative qui peut louer le capital et le travail aux ménages (l'hypothèse de rendements constants implique que l'équilibre ne dépend pas du nombre d'entreprises tant que la concurrence est supposée parfaite). Les ménages détiennent une richesse nette a_t qui est la différence entre leurs détentions d'obligations sur les entreprises k_t et leur endettement b_t vis-à-vis du système financier. Ils sont indifférents à la composition de leur richesse car les rendements de tous les placements et dettes sont supposés égaux à r_t . Chaque ménage, qui peut être créateur ou débiteur net, décide à chaque instant du montant de consommation et donc d'épargne. Les ménages et les entreprises ont des anticipations rationnelles.

8. Ecrire le programme de maximisation du ménage représentatif en notant a_t la richesse par membre du ménage à la date t .

9. Ecrire le programme de l'entreprise et ses conditions du premier ordre.

10. Définir le choix optimal du ménage.

11. Définir le sentier d'équilibre de la consommation et du capital.

12. Entre 1995 et 2007, l'économie américaine a connu un taux d'épargne très faible (voire négatif) et un taux d'intérêt réel lui aussi très faible. A l'aide du modèle de Ramsey, expliquer la dynamique attendue de la consommation, du capital et du taux d'intérêt. Certains analystes expliquent l'histoire économique récente des Etats-Unis par un choc de préférence pour le présent. Cette explication est-elle cohérente avec le modèle ? Commenter la crise récente à la lumière de ce modèle.