Ecole Polytechnique, Eco-431 Macroéconomie
PC 2
La croissance économique (2)
Correction

Exercice 1 : Stock de connaissances et croissance à long terme

1. L'équation d'accumulation des connaissances permet de modéliser le progrès technique comme le résultat d'un investissement dans la recherche-développement. Plus cet investissement est important (ie plus il y a de chercheurs), plus la croissance de la productivité est importante. $\lambda < 1$ signifie cependant que l'augmentation du nombre de chercheurs augmente moins que proportionnellement le taux de croissance de la productivité, par exemple parce que la probabilité que plusieurs personnes travaillent sur la même chose augmente avec le nombre de chercheurs. En outre, l'accumulation de connaissance est fonction du stock de connaissances à la période considérée. Pour φ positif, la productivité de la recherche augmente avec le stock de connaissances.
Cette équation d'accumulation introduit la possibilité d'externalités: $\lambda < 1$ correspond à une externalité de congestion entre chercheurs (certaines découvertes individuelles n'augmentent pas le stock de connaissances agrégé en cas de duplication), $\varphi > 0$ implique des externalités positives sur l'activité de recherche).

2. Le sentier de croissance équilibré est caractérisé par:

$$g_y = g_k = g_A$$

avec g_x le taux de croissance de la variable x. Le taux de croissance de la productivité est défini par:

$$g_A = \frac{\dot{A}_t}{A_t} = A_t^{\varphi - 1} L_{rt}^{\lambda}$$

qui est constant si et seulement si:

$$\lambda \frac{\dot{L}_{rt}}{L_{rt}} - (1 - \varphi) \frac{\dot{A}_t}{A_t} = 0$$

Sur le sentier de croissance équilibré, le taux de croissance du nombre de chercheurs est égal au taux de croissance de la population. On en déduit le taux de croissance du progrès technique à l'équilibre stationnaire:

$$g_A = \frac{\lambda n}{1 - \varphi}$$

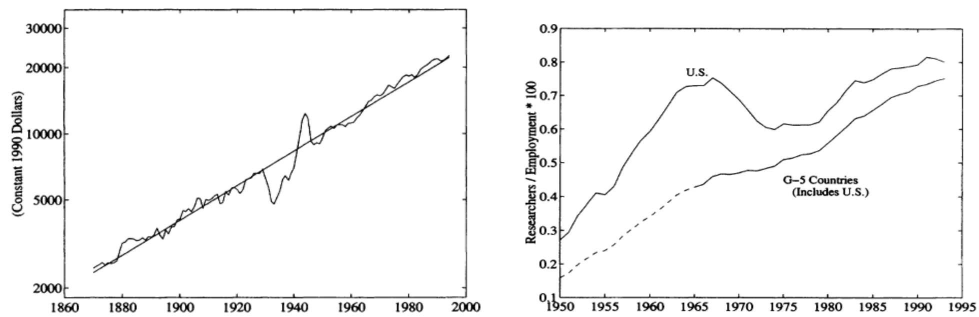
Le taux de croissance de long terme dépend donc des paramètres de la fonction de production de connaissances et de la croissance du nombre de chercheurs.

Dans le cas simple où $\lambda = 1$ and $\varphi = 0$, on a $\dot{A}/A = n$ à l'équilibre stationnaire. Si la population de chercheurs était constante, le stock de connaissances augmenterait de L_r nouvelles idées par période. Cette augmentation constante implique un taux de croissance de A décroissant: plus le stock de connaissances augmente, plus un augmentation de L_r correspond à un taux de croissance faible. Dans ce modèle, il faut donc sans cesse augmenter la population des chercheurs pour maintenir le taux de croissance de la productivité constant. A s_r constant, celà implique une croissance entretenue par la croissance démographique.

Dans le cas $\lambda < 1$ et/ou $\varphi < 1$, le taux de croissance démographique nécessaire pour entretenir un niveau donné de croissance du stock de connaissances est plus élevé du fait des externalités négatives qui ralentissent l'accumulation de connaissances.

Figure 1: Croissance et intensité de la recherche

PIB par tête aux US　　　　　Intensité de la recherche



3. Pour $\varphi = \lambda = 1$, le taux de croissance du stock de connaissances à chaque période est directement proportionnel au nombre de chercheurs:

$$\frac{\dot{A}_t}{A_t} = L_{rt}$$

La productivité des chercheurs est proportionnelle au stock de connaissances. Sous cette hypothèse la productivité des chercheurs augmente même si le stock de chercheurs est constant. Cette spécification est cependant rejetée par les évidences empiriques: même si le stock de chercheurs a beaucoup augmenté depuis le début du 20ème siècle, la croissance de la productivité n'a pas augmenté suffisamment pour valider ce cas particulier du modèle (**voir Graphique 1**)
Pour $\varphi = 1$ et $n > 0$, on a

$$g_A = L_{rt}^{\lambda}$$

et la seule possibilité pour que la croissance des connaissances ne soit pas explosive implique $\lambda = 0$.
On peut comparer ce résultat avec ce qu'on avait dans le cadre du modèle néo-classique. Dans ce modèle, la croissance de la population diminue le revenu agrégé sur le sentier stationnaire. Ici, la croissance démographique a cependant un effet supplémentaire, lié à l'impact de la croissance démographique sur l'innovation: une population plus nombreuse génère plus de connaissances, ce qui bénéficie à tous lorsque la connaissance est non-rivale. Comme dans le modèle néo-classique, la seule source de croissance à long terme est la croissance démographique. Des modifications du taux d'épargne ou de la répartition de la population active entre production et recherche n'ont aucun effet sur la croissance à long terme.

4. Dans ce modèle, une baisse de s_r la part de la population active dans le secteur de la recherche n'a aucun impact sur la croissance de long terme, qui ne dépend que de la croissance démographique et de la sensibilité du processus d'accumulation au stock de connaissances et au nombre de chercheurs. La seule configuration possible dans laquelle un choc sur s_r modifierait la croissance de long terme serait celle où $\varphi = 1$.
En revanche, un choc sur s_r va modifier le taux de croissance pendant la période de convergence vers l'équilibre stationnaire. Pour le montrer, on prend le cas particulier $\lambda = 1$ et $\varphi = 0$. Dans ce cas, on a:

$$\frac{\dot{A}_t}{A_t} = s_r \frac{L_t}{A_t}$$

En supposant qu'on se trouve initialement à l'équilibre stationnaire, la hausse permanente de s_r provoque une hausse immédiate du stock de connaissances et donc une hausse du taux de crois-

Figure 2: Impact du choc sur la croissance de la productivité

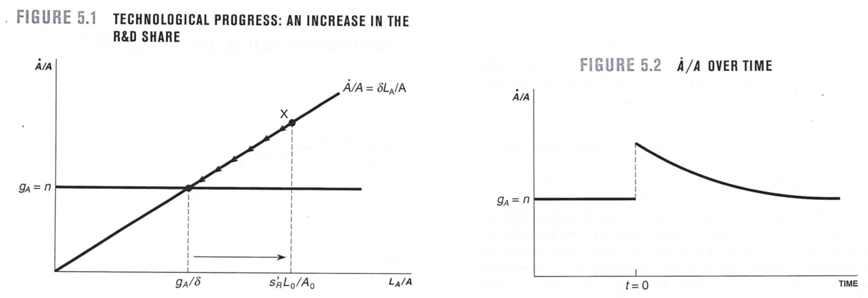
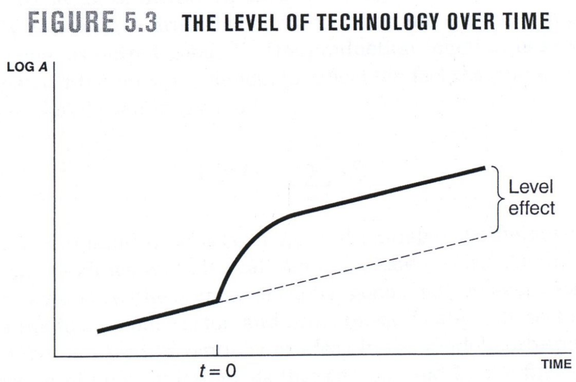


Figure 3: Impact du choc sur le niveau de la productivité



sance de la productivité, qui devient supérieur à sa valeur stationnaire. A ce niveau, la croissance démographique n'est pas suffisante pour maintenir la croissance de la productivité et donc le ratio L_{rt}/A_t diminue. Il en résulte une baisse du taux de croissance de la productivité, qui revient petit à petit à sa valeur stationnaire $g_A = n$. Finalement, la hausse de s_r augmente le taux de croissance du progrès technique à court terme mais pas à l'équilibre stationnaire (Graphique 2).
Quel est l'impact du choc sur le niveau de la productivité? Initialement, le niveau de la productivité croît au taux stationnaire n. Au moment du choc, la croissance de A_t s'accélère puis rediminue. Le choc a un effet permanent sur le niveau de la productivité. Cette dynamique est similaire à ce qu'on avait dans Solow dans le cas d'un choc sur le taux d'épargne (Graphique 3).
On peut aussi facilement étudier l'impact du choc sur la production par tête. A l'équilibre stationnaire, on a comme dans le modèle de Solow:

$$s_K \frac{(y/A)^*}{(k/A)^*} = \delta + n + g_A$$

Avec la définition de la fonction de production:

$$\frac{y_t}{A_t} = \left(\frac{k_t}{A_t}\right)^\alpha (1 - s_r)^{1-\alpha}$$

et donc, à l'équilibre stationnaire, le production par unité de travail efficace s'écrit:

$$\left(\frac{y}{A}\right)^* = \left(\frac{s_K}{\delta + n + g_A}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1 - s_r)$$

La seule différence par rapport au modèle néo-classique porte sur la présence du terme $(1 - s_r)$ qui différencie l'output par travailleur de l'output par tête.
Le long du sentier stationnaire, on a:

$$A_t = \frac{s_r L_t}{g_A}$$

et donc l'output par tête est défini par:

$$y_t^* = \left(\frac{s_K}{\delta + n + g_A}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1 - s_r)\frac{s_r L_t}{g_A}$$

L'output par tête est donc proportionnel à la population total. Le modèle se caractérise par un effet d'échelle en niveau: une économie plus grande sera une économie plus riche. Cet effet d'échelle s'explique par le caractère non rival des connaissances: une grande économie est aussi un marché plus grand pour la connaissance, ce qui augmente le rendement de la recherche. En outre, une grande économie a un plus grand potentiel de chercheurs.
L'impact de la répartition de la population entre production et recherche est ici double: un effet négatif lié au fait qu'une hausse du nombre de chercheurs diminue le nombre de travailleurs produisant l'output et un effet positif lié à l'impact des chercheurs sur la croissance de la productivité.

Exercice 2 : Dépense publique et croissance économique
1. Avec $A_t = \bar{A}(G_t/L_t)^\beta$, $G_t = xY_t$ et $S_t = s(1-x)Y_t$, le produit par tête s'écrit :

$$\begin{aligned} y_t &= \bar{A}\left(\frac{G_t}{L_t}\right)^\beta k_t^\alpha = \bar{A}(xy_t)^\beta k_t^\alpha \\ \Rightarrow y_t &= \left(\bar{A}x^\beta\right)^{\frac{1}{1-\beta}} k_t^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \end{aligned}$$

Dans le cas où $\frac{\alpha}{1-\beta}$ est inférieur à 1, on retrouve une fonction de production similaire à ce qu'on avait dans le cadre du modèle de Solow: la productivité marginale du capital reste décroissante malgré l'impact des dépenses publiques financées par les ménages sur la productivité. En revanche, pour $\frac{\alpha}{1-\beta}$ égal à 1, la productivité marginale est constante et on se retrouve dans un modèle de type AK.

L'équation d'accumulation du capital par tête est donnée par:

$$\dot{k}_t = s(1-x)y_t - (\delta + n)k_t = s(1-x)\bar{A}^{\frac{1}{1-\beta}} x^{\frac{\beta}{1-\beta}} k_t^{\frac{\alpha}{1-\beta}} - (\delta + n)k_t$$

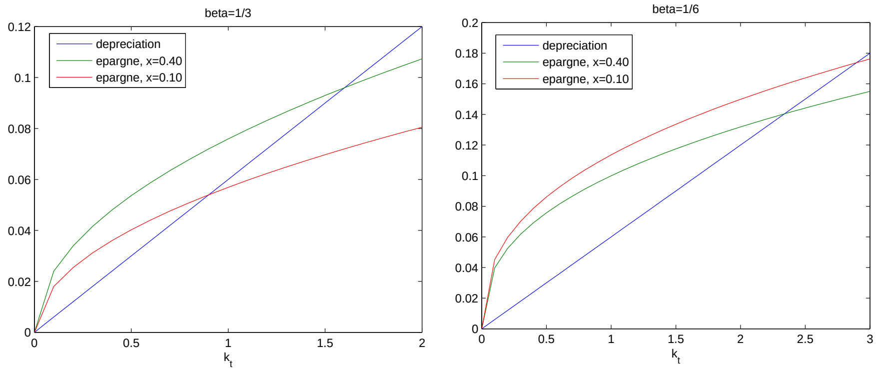
La dynamique d'accumulation dépend donc du taux d'épargne mais aussi du taux d'imposition, qui détermine à la fois le revenu disponible et l'investissement en infrastuctures publiques.

2. Si $\alpha + \beta < 1$, l'économie converge vers un état stationnaire tel que le taux de croissance du revenu et du capital par tête est constant. On a alors le stock de capital par tête :

$$k^* = \left(\frac{s(1-x)\bar{A}^{\frac{1}{1-\beta}} x^{\frac{\beta}{1-\beta}}}{\delta + n}\right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}}$$

Celui-ci dépend également du taux d'imposition.

Figure 4: Accumulation du capital et taux d'imposition



Lorsque les dépenses publiques sont suffisament efficaces (β grand), une augmentation du taux d'imposition augmente le stock de capital de long terme en accroissant la productivité des facteurs. En revanche, l'effet est inverse si β est petit car la baisse de l'épargne privée n'est pas compensée par l'effet des dépenses publiques sur l'efficacité marginale du capital.

3. Lorsque $\alpha + \beta = 1$, on a :

$$\dot{k}_t = \left[s(1-x)\bar{A}^{\frac{1}{1-\beta}} x^{\frac{\beta}{1-\beta}} - (\delta + n) \right] k_t$$

et le stock de capital s'accroît continument dès lors que :

$$s(1-x)\bar{A}^{\frac{1}{1-\beta}} x^{\frac{\beta}{1-\beta}} > \delta + n$$

L'effet total des dépenses publiques est ambigu : il augmente la productivité globale des facteurs mais réduit l'épargne privée. $\dot{k}_t/k_t$ en fonction de $x = G/Y$ est une courbe en cloche. Le ratio G/Y qui maximise la croissance satisfait:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{1-\beta} x^{\frac{\beta}{1-\beta}-1}(1-x) - x^{\frac{\beta}{1-\beta}} &= 0 \\ x &= \beta \end{aligned}$$

Il est d'autant plus intéressant d'élever les dépenses publiques que celle-ci est productive. L'étude de Barro montre une corrélation négative entre consommation publique et croissance, ce qui suggère que pour ces pays $x > \beta$.