Ecole Polytechnique, Eco-431 Macroéconomie
PC 1
La croissance économique (1)
Correction

1. On part de l'équation d'accumulation du capital total :

$$\dot{K}_t = sY_t - \delta K_t \qquad \Rightarrow g_K \equiv \frac{\dot{K}_t}{K_t} = s\frac{Y_t}{K_t} - \delta$$

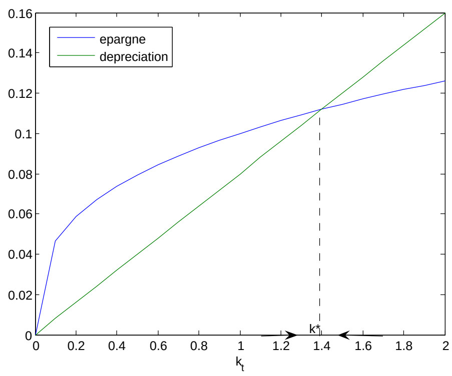
Or $k_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t}$, i.e. $g_k = g_K - g_A - g_L$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{k}_t}{k_t} &= s\frac{Y_t}{K_t} - \delta - g_A - g_L \\ \Rightarrow \dot{k}_t &= sy_t - (\delta + g_A + g_L)k_t \end{aligned}$$

A l'équilibre stationnaire, on a $\dot{k}_t = 0$, i.e. $sf(k^*) = (\delta + g_A + g_L)k^*$. On en déduit :

$$\begin{aligned} k^* &= \left(\frac{s}{\delta + g_A + g_L}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ y^* &= \left(\frac{s}{\delta + g_A + g_L}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Figure 1: L'équilibre stationnaire dans le modèle de Solow



Pour $k_t < k^*$, l'épargne $(sf(k_t))$ est supérieure à la dépréciation du stock de capital par unité de travail efficace $(\delta + g_L + g_A)k_t$ car la productivité marginale du capital est supérieure au taux de dépréciation. On a donc $\dot{k}_t > 0$, i.e. accumulation de capital. Au contraire, pour $k_t > k^*$, la productivité marginale du capital est insuffisante pour compenser la dépréciation et le stock de capital par tête diminue. Ce modèle se caractérise donc par une convergence vers l'état stationnaire (k^*, y^*).

On a : $Y_t = y_t A_t L_t$, d'où: $g_Y = g_y + g_A + g_L$. Sur le sentier stationnaire, $g_y = 0$ donc le PIB croît au taux $g_A + g_L$ à long terme. Le PIB par travailleur croît quant-à-lui au taux de croissance de la productivité du travail.

Si ces taux de croissance ne dépendent que de la croissance de la productivité du stock de travail efficace à long terme, les variables en niveau sont également sensibles au taux d'épargne et au taux de dépréciation du capital. Cela signifie qu'une hausse du taux d'épargne ne permet pas d'accroître la croissance de long terme mais augmente une fois pour toute le stock de capital et le produit par unité de travail efficace de l'état stationnaire.

2. Les conditions du premier ordre pour la firme donnent:

$$w_t = A_t\left(1-\alpha\right)k_t^{\alpha},\ r_t+\delta=\alpha k_t^{\alpha-1}$$

Le taux de location du capital payé par la firme aux détenteurs du capital est égal à l'équilibre au taux d'intérêt plus le taux de dépréciation du capital. Si le détenteur du capital ne loue pas le capital aux entreprises, il peut le placer au taux sans risque r_t. Pour qu'il ait une incitation à louer son capital à l'entreprise, il faut que celle-ci compense le capitaliste pour la dépréciation du capital.

3. A l'état stationnaire, on a les relations suivantes:

Part des facteurs:

$$\frac{\left(r_t+\delta\right)K_t}{Y_t}=\frac{\left(\alpha k_t^{\alpha-1}\right)k_t}{k_t^{\alpha}}=\alpha,\ \frac{w_tL_t}{Y_t}=1-\alpha$$

Ratio capital/PIB:

$$\frac{K_t}{Y_t}=\frac{K_t/A_tL_t}{Y_t/A_tL_t}=\frac{k^*}{y^*}=\left(k^*\right)^{1-\alpha}$$

Croissance du PIB/travailleur:

$$y^*=f\left(k^*\right)=\frac{Y_t}{A_tL_t}\Rightarrow\frac{Y_t}{L_t}=f\left(k^*\right)A_t\Rightarrow g_{Y/L}=g_A$$

Rendement du capital investi:

$$r^*=f'\left(k^*\right)-\delta=\alpha\left(k^*\right)^{\alpha-1}-\delta$$

Par ailleurs, la croissance des salaire est:

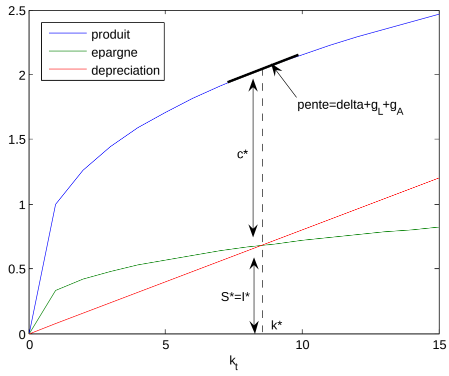
$$w_t=A_t\left(1-\alpha\right)\left(k^*\right)^{\alpha}\Rightarrow\frac{\dot{w}_t}{w_t}=g_A$$

4. Le taux d'épargne "optimal" est celui qui maximise la consommation par unité de travail efficace à l'équilibre stationnaire. Celle-ci est définie par : $c^*=(1-s)y^*=f(k^*)-sf(k^*)$. Or, on sait qu'à l'équilibre stationnaire, $sf(k^*)=(g_L+g_A+\delta)k^*$. On vérifie donc que le taux d'épargne optimal est celui qui maximise: $c^*=f(k^*)-(g_L+g_A+\delta)k^*$. Sachant que k^* est une fonction croissante du taux d'épargne, cette maximisation implique :

$$\begin{aligned}
& f'(\hat{k}^*)=g_L+g_A+\delta\\
\Leftrightarrow\ & \alpha\,{\hat{k}^*}{}^{\alpha-1}=g_L+g_A+\delta\\
\Leftrightarrow\ & \alpha\left(\frac{\hat{s}}{g_L+g_A+\delta}\right)^{-1}=g_L+g_A+\delta\\
\Leftrightarrow\ & \hat{s}=\alpha
\end{aligned}$$

C'est ce qu'on appelle la "règle d'or" : la consommation par unité de travail efficace est maximale lorsque le taux d'épargne (et d'investissement) est égal à la part du capital dans la valeur ajoutée. Pour que le produit par tête soit élevé à long terme, il faut en effet accumuler beaucoup de capital en épargnant. Cependant, maintenir ce stock de capital élevé à un niveau constant nécessite également

Figure 2: Modèle de Solow et règle d'or

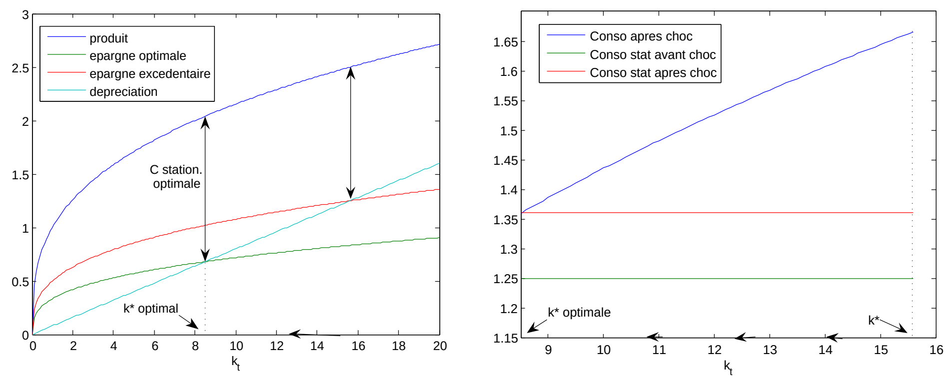


des ressources. Il existe donc un niveau optimal de capital (et d'investissement) qui maximise la consommation. Celui-ci est illustré sur le graphique 2. La consommation par tête est maximale lorsque la tangente à $f(k_t)$ au point stationnaire est exactement égale à $(\delta + g_L + g_A)$, i.e. la pente de la droite de dépréciation du stock de capital par unité de travail efficace.

Dans la mesure où, dans ce modèle, l'épargne est égale à l'investissement, on peut aussi interpréter cette règle d'or en terme de taux d'investissement. On sait que dans un cadre concurrentiel, le taux d'intérêt réel est égal à la productivité marginale du capital : $r_t = f'(k_t) - \delta$. A l'équilibre stationnaire de règle d'or, on a donc : $\hat{r}^* = f'(\hat{k}^*) - \delta = g_L + g_A$.

Pour $s > \hat{s}$, le stock de capital par tête de long terme est supérieur au stock de capital de règle d'or et la consommation inférieure. Si un choc exogène permet de réduire le taux d'épargne au niveau du taux d'épargne optimal, la consommation par tête augmente immédiatement puis diminue de période en période jusqu'à atteindre le nouveau niveau stationnaire, supérieur au niveau initial. La situation de sur-épargne est donc inefficiente dynamiquement puisqu'on peut augmenter la consommation par tête à chaque période en réduisant le taux d'épargne. Cette situation est illustrée sur la figure 3.

Figure 3: Effet d'un choc sur le taux d'épargne à partir d'une situation de sur-épargne



A l'inverse, si l'économie n'épargne pas assez, on peut augmenter la consommation par tête de long terme en augmentant le taux d'épargne. Cependant, l'effet initial sera une baisse de la consommation par tête permettant d'accumuler plus de capital par l'investissement. Une solution alternative (externe au modèle) serait un transfert international permettant au pays de sortir de la "trappe à sous-développement".

5. Dans ce modèle, les écarts de croissance de long terme s'expliquent uniquement par des facteurs démographiques (différences de g_L) ou technologiques (différences de g_A), ce qui n'est pas très réaliste. Empiriquement, on observe en effet de forts écarts de taux de croissance du PIB par tête et une corrélation avec le taux d'investissement. Dans le cadre du modèle néo-classique, cette corrélation suggère que les pays ne sont pas en régime de croissance équilibrée. En effet, en dehors du sentier de croissance stationnaire, la croissance dépend du niveau initial du stock de capital et de l'épargne domestique (en l'absence d'endettement extérieur). Plus le stock de capital initial est faible, plus la productivité marginale du capital est élevée et plus l'investissement est rentable.

6. En dehors de l'équilibre stationnaire, on a : $g_k = sk_t^{\alpha-1} - (\delta + g_A + g_L)$ et donc $g_y = \alpha s k_t^{\alpha-1} - \alpha(\delta + g_A + g_L)$. On applique un développement limité au voisinage de l'état stationnaire pour trouver le taux de croissance du PIB par unité de travail efficace :

$$\begin{aligned} g_y &\approx g_{y^*} + (k_0 - k^*)\alpha(\alpha-1)s\, {k^*}^{\alpha-2} \\ &\approx \frac{k_0 - k^*}{k^*}\alpha(\alpha-1)(\delta + g_A + g_L) \end{aligned}$$

En utilisant l'approximation, $\lim_{x\to 1}(x-1) = \lim_{x\to 1}\ln(x)$, on trouve :

$$\begin{aligned} g_y &\approx \ln\left(\frac{k_0}{k^*}\right)\alpha(\alpha-1)(\delta + g_A + g_L) \\ &\approx \ln\left(\frac{y_0}{y^*}\right)(\alpha-1)(\delta + g_A + g_L) \\ &= \beta \ln\left(\frac{y_0}{y^*}\right) \end{aligned}$$

Autour de l'état stationnaire, le taux de croissance du PIB par unité de travail efficace est donc fonction du niveau initial du PIB par tête (*i.e.* du stock de capital). Il est positif pour $y_0 < y^*$ et tend vers 0 quand y_0 tend vers le niveau du PIB de long terme. C'est ce qu'on appelle la convergence absolue : la croissance par tête est d'autant plus rapide que le niveau initial de capital est faible. $\beta < 0$ mesure la vitesse de convergence. Elle dépend de la technologie mais aussi du taux de dépréciation du capital et du taux de croissance de la population.

5. Pour $g_L = 1\%$, $g_A = 2\%$, $\delta = 5\%$ et $\alpha = 1/3$, on a $\beta = -16/3$, *i.e.* que 5.3% de l'écart à la valeur d'équilibre est résorbé chaque année. En réécrivant l'expression du taux de croissance de la production, on trouve:

$$\begin{aligned} & g_y = \beta \ln\left(\frac{y_t}{y^*}\right) \\ \Rightarrow\ & \frac{d\ln(y_t/y^*)}{\ln(y_t/y^*)} = \beta dt \\ \Rightarrow\ & \ln\left[\frac{\ln(y_t/y^*)}{\ln(y_0/y^*)}\right] = \beta(t-0) \\ \Rightarrow\ & \frac{\ln(y_t/y^*)}{\ln(y_0/y^*)} = e^{\beta t} \\ \Rightarrow\ & y_t - y^* = e^{\beta t}(y_0 - y^*) \end{aligned}$$

Pour résorber la moitié de l'écart initial du PIB par rapport à son niveau stationnaire, il faut donc:

$$t = \frac{\ln(1/2)}{\beta} = 13ans$$

Si la production initiale par unité de travail efficace est de 1/4 de sa valeur stationnaire, le taux de croissance annuel du PIB par unité de travail efficace sera de $g_y = \beta \ln(y_0/y^*) = 7.4\%$.

Cette vitesse de convergence est beaucoup trop élevée par rapport aux évidences empiriques. Les estimations qui trouvent un phénomène statistique de convergence dans les données (principalement des estimations sur des échantillons de pays/régions suffisamment proches économiquement, OCDE, pays européens, régions US par ex) obtiennent des vitesses de convergence de l'ordre de 2% par an, *i.e.* un demi-écart de 35 ans. Cette valeur de β n'est compatible qu'avec un coefficient de capital beaucoup plus élevé. Pour réconcilier les évidences empiriques et le modèle, il faut donc utiliser une conception plus large du capital, intégrant par exemple le capital humain.